11. Получите определитель Вронского функций Бесселя и Ханкеля.

Это параграф 2.9, если идти по лекциям.
Боголюбову стало интересно: вот ввёл он четыре функции, две полезные (Бесселя и Неймана), и две бесполезные (Ханкеля), а все ли они являются линейно независимыми? Вдруг существует какое-нибудь ν, при котором они будут НЗ?

Какой надёжный способ установления линейной независимости? Подсчитать вронскиниан. Я на всякий случай напомню, что это такое.
Пусть у нас две функции y(x) и z(x). Тогда вот такой определитель

$$\begin{vmatrix} y(x) & z(x) \\ y'(x) & z'(x) \end{vmatrix}$$

Называется определителем Вронского. Если две функции ЛНЗ, то 0 в каждой точке.

Нам нужно подсчитать $W[J_\nu(x), H^1_\nu(x)]$.
Однако проблема: функции Бесселя и Ханкеля противные сами по себе, а считать от них производные… ой, мы не справимся.
Поэтому давайте искать обходные пути. Выразим для начала функцию Ханкеля через Бесселя:

$$H_\nu^{(1)}(x) = i\frac{J_\nu(x)e^{-i\nu\pi} - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$$

Если мы подставим Ханкеля в таком виде и воспользуемся линейностью вронскиниана, то первое слагаемое занулится (вронскиниан равен нулю, когда равны оба его аргумента), и останется только второе:

$$W[J_\nu, H_\nu^{(1)}] = -i\frac{1}{\sin\nu\pi}W[J_\nu, J_{-\nu}]$$

(иногда Вронскиниан по поведению напоминает коммутатор…)

Далее Жири… ой, Боголюбов предложил воспользоваться теоремой Остроградского-Лиувилля. Как вам идея?

Так как вы с вероятностью 99,9% забыли формулировку этой теоремы из курса дифуров, напомню.
Пусть y1(x) и y2(x) – ФСР вот этого ДУ

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

Тогда

$$W[y_1, y_2] = Ce^{-\int p(x)dx}$$

Теперь давайте вспомним ДУ, решениями которого являются $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$:

$$\boxed{x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0}$$

Нужно, что перед второй производной коэф был 1:

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \left(1 - \left(\frac{\nu}{x}\right)^2\right)y(x) = 0$$

p(x) – это коэффициент при первой производной. Вот он: $p(x) = \frac{1}{x}$,

Подставляем его сюда

$$W[y_1, y_2] = Ce^{-\int p(x)dx}$$

И получаем

$$W[J_\nu, J_{-\nu}] = \frac{C_0}{x}$$

У нас проблема: мы не знаем C0! А вдруг это 0?

И тут начинаются достаточно продолжительные танцы с бубном по нахождению C0.

Нам всё-таки придётся подсчитать производные. Для этого вспомним определение функции Бесселя через ряд:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$$

Боголюбов выносит всё, что можно вынести, за знак суммы:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \left(\frac{1}{\nu!} + x^2 \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+\nu)!\,k!} \cdot \frac{x^{2k-2}}{2^{2k}}}_{\equiv P(x)} \right)$$

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \left(\frac{1}{\nu!} + x^2P(x)\right), \ |P(0)| < \infty$$

И точно также для $J_{-\nu}(x)$:

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \left(\frac{1}{(-\nu)!} + x^2Q(x)\right), \ |Q(0)| < \infty$$

Теперь мы готовы считать производные

$$J'_\nu(x) = \frac{\nu}{x}J_\nu(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \left(2xP(x) + x^2P'(x)\right)$$

$$J'_{-\nu}(x) = -\frac{\nu}{x}J_{-\nu}(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \left(2xQ(x) + x^2Q'(x)\right)$$

А теперь и вронскиниан не грех подсчитать:

$$W[J_\nu, J_{-\nu}] = J_\nu J'_{-\nu} - J_{-\nu} J'_\nu = -\frac{2\nu}{x} J_\nu J_{-\nu} + xR(x),\ |R(0)| < \infty$$

Где R(x) – какая-то там функция от P(x) и Q(x), нас не интересующая, главное, что ограниченная в нуле.

Хм, хм, а чему равно $J_\nu(x)J_{-\nu}(x)$? Это $\frac{1}{\nu!(-\nu)!}$, и если эту величину подсчитать, это будет $\frac{\nu\pi}{\sin\nu\pi}$. В общем, не 0! Подставляем:

$$W[J_\nu, J_{-\nu}] = -\frac{2\nu}{x} \cdot \frac{\sin\nu\pi}{\nu\pi} + xR(x)$$

А теперь сравниваем с тем, что должны получить по Остроградскому-Лиувиллю:

$$W[J_\nu, J_{-\nu}] = \frac{C_0}{x}$$

Такое возможно, только если R(x)=0, а $C_0 = -\frac{2}{\pi}\sin\pi\nu$. Итак, вот вронскиниан $\boxed{W[J_\nu, J_{-\nu}] = -\frac{2}{\pi x}\sin\pi\nu}$ и он не ноль! Ч.т.д.